×42×

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1977

**OPTION M'**

## DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^*$ celui des réels non nuls et $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels strictement positifs. $a$ est un élément donné de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les axes $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ sont respectivement dirigés par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. On va associer à tout élément $(\lambda, \mu)$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une surface $S_{\lambda,\mu}$ de E (le mot "surface" est pris en un sens large, l'existence du plan tangent en chaque point n'étant pas imposée).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par $D_{\lambda,\mu}(\theta)$ la droite qui passe par le point $P(\theta)$, de coordonnées $a \cos\theta$, $a \sin\theta$, 0, et qui a comme vecteur directeur

$$\overrightarrow{u(\theta)} = \cos(\lambda\theta + \mu)\cos\theta\,\vec{i} + \cos(\lambda\theta + \mu)\sin\theta\,\vec{j} + \sin(\lambda\theta + \mu)\,\vec{k}.$$

$S_{\lambda,\mu}$ est la surface engendrée par $D_{\lambda,\mu}(\theta)$, $\theta$ décrivant $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que l'on a $S_{\lambda,\mu} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} D_{\lambda,\mu}(\theta)$).

On emploie les notations $D_\lambda(\theta)$ et $S_\lambda$ à la place, respectivement, de $D_{\lambda,0}(\theta)$ et $S_{\lambda,0}$.

*On peut traiter la partie II sans avoir traité la partie I.*

### Partie I

I - 1°/ Comment obtient-on $S_{\lambda,\mu}$ à partir de $S_\lambda$ ?

Comment obtient-on $S_\lambda$ à partir de $S_{-\lambda}$ ?

Dans toute la suite, on prendra $\lambda$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

I - 2°/ Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquelles l'ensemble des entiers k, strictement positifs et tels que $D_\lambda(2k\pi)$ coïncide avec Ox, ne soit pas vide. Lorsqu'il en est ainsi, déterminer le plus petit élément de cet ensemble, que l'on désignera par $k_\lambda$. Quelle est la réunion des droites $D_\lambda(\theta)$, $\theta$ décrivant $[0, 2k_\lambda\pi[$ ?

I - 3°/ On désigne par $\mathcal{I}_\lambda$ l'ensemble des nombres réels $\theta$ tels que $D_\lambda(\theta)$ soit parallèle à Oz et par $\mathcal{C}_\lambda$ l'ensemble des points $P(\theta)$, $\theta$ décrivant $\mathcal{I}_\lambda$.

.../...

Montrer que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , $\mathcal{E}_\lambda$ n'est pas vide. Pour quelles valeurs de $\lambda$ est-il un ensemble fini ? Lorsqu'il en est ainsi, déterminer le nombre de ses éléments. ×43×

Dans quels cas ce nombre est-il égal à 1 ? Dans quels cas est-il égal à 2 ?

I - 4°/ On désigne par $\Lambda$ l'ensemble des éléments $\lambda$ de $\mathbb{R}_+^*$ pour lesquels il existe sur la surface $S_\lambda$ une droite $\Delta$ , distincte de Oz et telle que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$ , $D_\lambda(\theta)$ et $\Delta$ soient dans un même plan.

Montrer que $\Lambda$ contient un élément unique, que l'on déterminera, et qu'à cet élément correspond une droite $\Delta$ unique, que l'on déterminera. Pour cela, on pourra procéder de la façon suivante (toutefois, cette méthode n'est pas imposée) :

a) Montrer que, si $\Delta$ existe, elle ne peut pas être dans un même plan que Oz .

b) En tenant compte des résultats obtenus à la question I-3°/ , montrer que tout élément de $\Lambda$ est de la forme $\frac{1}{2m}$ , m étant un entier strictement positif.

c) Montrer que m ne peut pas être pair et que, parmi les valeurs impaires, il ne peut prendre que l'une d'entre elles, que l'on déterminera,

d) Vérifier que cette valeur convient et qu'il lui correspond une droite $\Delta$ unique, que l'on déterminera.

## Partie II

Dans cette partie, on prend $\lambda = \frac{1}{2}$ . Et l'on emploie les notations $D(\theta)$ et S à la place, respectivement, de $D_{\frac{1}{2}}(\theta)$ et $S_{\frac{1}{2}}$ .

On définit une application F de $\mathbb{R}^2$ dans S , surjective, en associant à tout couple $(\theta , \rho)$ de nombres réels le point M de $D(\theta)$ déterminé par $\overrightarrow{P(\theta)M} = \rho \overrightarrow{u(\theta)}$ .

II - 1°/ Expliciter les coordonnées x , y , z de M en fonction de $\theta$ et $\rho$ .

Former l'équation cartésienne de S (on doit obtenir une équation de la forme $\Pi(x, y, z) = 0$ , où $\Pi$ est un polynome du troisième degré) .

II - 2°/ Déterminer l'intersection de S avec le plan d'équation $y = z$ , ainsi que l'intersection de S avec la sphère de centre 0 et de rayon $a$ . On représentera, par un croquis, cette dernière intersection, figurée sur la sphère.

II - 3°/ Pour $\rho \in \mathbb{R}$ , on désigne par $\Gamma_\rho$ la courbe décrite par le point $M = F(\theta, \rho)$ quand $\theta$ décrit $[0, 4\pi]$ .

Exprimer la longueur $\ell(\rho)$ de $\Gamma_\rho$ sous la forme d'une intégrale .

Former le développement limité à l'ordre 2 de $\ell(\rho)$ , au voisinage de 0 .

II - 4°/ On désigne par $\gamma$ la projection orthogonale sur le plan xOy de la courbe $\Gamma_{\frac{a}{2}}$ .

Former l'équation polaire de $\gamma$ (relativement à l'axe $\overrightarrow{Ox}$) et tracer $\gamma$ .

II - 5°/ On désigne par $\Omega$ la projection orthogonale sur le plan xOy de la partie de S qui est l'image par F de $\mathbb{R} \times \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right]$ .

Représenter $\Omega$ sur la figure de la question précédente. Calculer l'aire de $\Omega$ .

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail